Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 5

МАТЕМАТИКА

В. А. УСПЕНСКИЙ

О ВЫЧИСЛИМЫХ ОПЕРАЦИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 V 1955)

В последнее время в исследованиях по теории алгоритмов, наряду с понятиями вычислимой функции, разрешимого и перечислимого множеств, которым соответствуют определения частично-рекурсивной функции, рекурсивного и рекурсивно-перечислимого множеств ([2]), все чаще стали появляться понятия функции, вычислимой относительно некоторых других функций (или сводящейся по вычислимости к этим другим функциям), и множества, разрешимого относительно некоторых других множеств (или сводящегося по разрешимости к этим другим множествам). Соответствующие этим интуитивным понятиям точные определения принадлежат Клини и Посту ([2,3]): говорят, что функция φ сводится по вычислимости к функциям $\psi_1, \ldots, \psi_l$, если φ частично-рекурсивна относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$; говорят, что множество P сводится по разрешимости к множествам $Q_1, \ldots, Q_l$, если характеристическая функция P сводится по вычислимости к характеристическим функциям $Q_1, \ldots, Q_l$.

В настоящей заметке изучается естественно возникающее понятие множества, перечислимого относительно других множеств (или сводящегося по перечислимости к другим множествам). В терминах «сводимости по перечислимости» оказывается возможным сформулировать определения и двух других видов сводимости (следствие теоремы 7 и теорема 8). Определение «сводимости по перечислимости» дается в п. 7 при помощи вводимого в п. 4 понятия вычислимой операции. В п. 5 устанавливается связь этого понятия с одним определением, предложенным ранее А. Н. Колмогоровым, а в п. 6 — с некоторыми еще более ранними конструкциями Поста. Пп. 1—3 носят вводный характер.

1. Системы множеств как топологические пространства. Всякую систему множеств $\mathfrak{T}$ будем в дальнейшем без оговорок считать T_0-пространством со следующей топологией: для любого конечного множества F подсистему $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{T}$ всех множеств из $\mathfrak{T}$, содержащих F в качестве подмножества, назовем элементарной открытой; открытой подсистемой в $\mathfrak{T}$ назовем любую сумму элементарных открытых. В частности, система $\mathfrak{T}_M$ всех подмножеств и система $\mathfrak{T}'_M$ всех конечных подмножеств произвольного множества M образуют каждая связное бикомпактное T_0-пространство.

Лемма. *Пусть $M_1, \ldots, M_l$ — произвольные множества, $\mathfrak{T}$ — произвольная система множеств. Отображение f топологического произведения $\mathfrak{T}_{M_1} \times \ldots \times \mathfrak{T}_{M_l}$ в $\mathfrak{T}$ тогда и только тогда непрерывно, когда для всяких $X_1 \subseteq M_1, \ldots, X_l \subseteq M_l$ выполняется равенство*

$$f(X_1, \ldots, X_l) = \\ = \cup f(X'_1, \ldots, X'_l) \quad \{X'_1 \subseteq X_1, \ldots, X'_l \subseteq X_l;\ X'_1 \in \mathfrak{T}'_{M_1}, \ldots, X'_l \in \mathfrak{T}'_{M_l}\}.$$

2. Множество $\mathfrak{H}$. В теории алгоритмов приходится рассматривать не только множество N всех натуральных чисел, но и множество N^2 всех упорядоченных пар и вообще множество N^n всех упорядоченных «n-ок» натуральных чисел, а также множество $N_2 = \bigcup N^k$ всех конечных упорядоченных строчек натуральных чисел, множество $N_3 = \bigcup N_2^k$ всех конечных упорядоченных строчек элементов N_2, и т. д. Нам будет удобно поэтому, следуя Гильберту [1], сразу ввести в рассмотрение множество $\mathfrak{H}$ всех «комбинаций» символа $|$ с самим собой. Множество $\mathfrak{H}$ определяется как минимальное множество, удовлетворяющее условиям: а) «единичная комбинация» $|$ и «пустая комбинация» $\wedge$ принадлежат $\mathfrak{H}$; б) если $a \in \mathfrak{H}$, то $(a) \in \mathfrak{H}$; в) если $a \in \mathfrak{H}$ и $b \in \mathfrak{H}$, то $ab \in \mathfrak{H}$ (через ab обозначается результат приписывания справа b к a, так что $\wedge a = a \wedge = a$). Отождествим 0 с $\wedge$, 1 с $|$, 2 с $||$ и т. д., а упорядоченную «n-ку» $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ элементов из $\mathfrak{H}$ — с элементом $(\mathfrak{a}_1)(\mathfrak{a}_2)\ldots(\mathfrak{a}_n) \in \mathfrak{H}$. Тогда каждое из множеств N^k и N_k окажется подмножеством $\mathfrak{H}$, и притом перечислимым (см. ниже). Системы $\mathscr{T}_{\mathfrak{H}}$ всех подмножеств и $\mathscr{T}'_{\mathfrak{H}}$ всех конечных подмножеств $\mathfrak{H}$ обозначим $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$. Каждый элемент $(\mathfrak{a}_1)(\mathfrak{a}_2)\ldots(\mathfrak{a}_n) \in \mathfrak{H}$ назовем представителем конечного (неупорядоченного) множества, $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n\} \in \mathscr{V}'$; каждое n-элементное множество из $\mathscr{V}'$ имеет, таким образом, $n!$ представителей в $\mathfrak{H}$.

(1 — 1)-соответствие между некоторым подмножеством N и $\mathfrak{H}$ называется (1 — 1)-нумерацией $\mathfrak{H}$; число $h \in N$, соответствующее элементу $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$, называется номером $\mathfrak{h}$. Нумерацию назовем допустимой, коль скоро существуют такие вычислимые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x, y)$, что если m и n суть номера $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$, то $\alpha(m)$ и $\beta(m, n)$ суть номера $(\mathfrak{m})$ и $\mathfrak{mn}$. Подмножество $R \subseteq \mathfrak{H}$ назовем перечислимым (вообще, принадлежащим классу P_n, $n \geqslant 1$), если множество его номеров в допустимой нумерации перечислимо (соответственно, принадлежит классу P_n проективно-рекурсивной классификации Клини — Мостовского [6]); можно доказать, что понятие перечислимости (вообще, принадлежности классу P_n при $n \geqslant 1$) не зависит от того, из какой именно допустимой нумерации исходить.

3. Частичные отображения. Всякое отображение $E \subseteq X$ в Y будем называть частичным отображением X в Y; если X и Y — топологические пространства, то можно говорить о непрерывных частичных отображениях X в Y. Графиком частичного отображения ψ теоретико-множественной степени $\mathfrak{H}^l$ в $\mathfrak{H}$ назовем множество G_ψ всех таких элементов $(\mathfrak{x}_1)(\mathfrak{x}_2)\ldots(\mathfrak{x}_l)\mathfrak{v} \in \mathfrak{H}$, что $\mathfrak{v} = \psi(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_l)$; графиком частичного отображения Ψ степени $\mathfrak{H}^l$ в $\mathscr{V}$ назовем множество G_Ψ всех таких элементов $(\mathfrak{x}_1)(\mathfrak{x}_2)\ldots(\mathfrak{x}_l)(\mathfrak{v}) \in \mathfrak{H}$, что $\mathfrak{v} \in \Psi(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_l)$; частичное отображение назовем вычислимым, если его график есть перечислимое множество. Каждое частичное отображение F теоретико-множественной степени $(\mathscr{V}')^l$ в $\mathscr{V}$ индуцирует частичное отображение $\tilde{F}$ степени $\mathfrak{H}^l$ в $\mathscr{V}$ такое, что $F(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_l) = F(\xi_1, \ldots, \xi_l)$, коль скоро $\mathfrak{x}_i \in \mathfrak{H}$ есть представитель $\xi_i \in \mathscr{V}'$ $(i = 1, \ldots, l)$; назовем F вычислимым, если $\tilde{F}$ вычислимо.

4. Вычислимые операции. Пусть $M_1, \ldots, M_l$ — перечислимые подмножества $\mathfrak{H}$. Отображение $\mathscr{T}_{M_1} \times \ldots \times \mathscr{T}_{M_l}$ в $\mathscr{V}$ назовем вычислимой операцией (l-местной), если: а) оно непрерывно; б) индуцированное им частичное отображение $(\mathscr{V}')^l$ в $\mathscr{V}$ вычислимо. При помощи леммы (п. 1) доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. *Суперпозиция вычислимых операций есть вычислимая операция.*

Теорема 2. *Всякое вычислимое и непрерывное частичное отображение $(\mathscr{V}')^l$ в $\mathscr{V}$ можно продолжить до вычислимой операции.*

Теорема 3. *Для всякой l-местной вычислимой операции* $\mathbf{U}$ *и всяких перечислимых в* $\mathfrak{H}$ *множеств* $E_1, \ldots, E_l$, D *существует вычислимая операция* $\mathbf{U}_1$, *являющаяся отображением* $\mathcal{T}_{E_1} \times \ldots \times \mathcal{T}_{E_l}$ *в* $\mathcal{T}_D$ *и такая, что для всяких* $S_1 \subseteq E_1, \ldots, S_l \subseteq E_l$, $R \subseteq D$ *из* $\mathbf{U}(S_1, \ldots, S_l) = R$ *вытекает* $\mathbf{U}_1(S_1, \ldots, S_l) = R$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{U}$ — *вычислимая операция и* $R = \mathbf{U}(S_1, \ldots, S_l)$. *Тогда, если* $S_i \in P_n$ $(n = 1, 2, \ldots;\ i = 1, \ldots, l)$, *то и* $R \in P_n$. *В частности, если все* S_i *перечислимы, то и* R *перечислимо.*

5. Операции Колмогорова. Минимальное множество, удовлетворяющее условиям а) — в) из п. 2 и содержащее сверх того «неизвестные» $x_1, \ldots, x_n$, обозначим $\mathfrak{H}[x_1, \ldots, x_n]$. Каждый элемент $g(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{H}[x_1, \ldots, x_n]$ при замене $x_1, \ldots, x_n$ элементами $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ из $\mathfrak{H}$ переходит в элемент $g(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ из $\mathfrak{H}$. Правилом Колмогорова называется строчка

$$g_1(x_1, \ldots, x_n),\ \nu_1;\ g_2(x_1, \ldots, x_n),\ \nu_2;\ \ldots;\ g_m(x_1, \ldots, x_n),\ \nu_m;$$
$$g(x_1, \ldots, x_n),\ \nu, \qquad (*)$$

где $g_i(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{H}[x_1, \ldots, x_n]$; m, n, ν_i, ν — натуральные числа. Конечная упорядоченная система множеств $M_1, \ldots, M_k$ называется замкнутой относительно правила (*), если для всяких $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \in \mathfrak{H}$ из $g_1(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \in M_{\nu_1}, \ldots, g_m(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \in M_{\nu_m}$ вытекает $g(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \in M_\nu$. Операция Колмогорова ($l$-местная) $\mathbf{K}$ задается конечным множеством $\mathfrak{K}$ правил Колмогорова и набором натуральных чисел $k, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_l, \varkappa$. Результат применения операции $\mathbf{K}$ к множествам $S_1, \ldots, S_l$ определяется так: рассматриваются системы множеств $M_1, \ldots, M_k$, замкнутые относительно каждого из правил $\mathfrak{K}$ и такие, что $M_{\varkappa_i} \supseteq S_i$ $(i = 1, \ldots, l)$; среди них выбирается такая система $M_1^+, \ldots, M_k^+$, что для всякой из рассматриваемых систем $M_1, \ldots, M_k$ выполняются соотношения $M_i \supseteq M_i^+$ $(i = 1, \ldots, k)$; полагается по определению $\mathbf{K}(S_1, \ldots, S_l) = M_\varkappa^+$.

Теорема 5. *Для того чтобы отображение* $\mathcal{V}^l$ *в* $\mathcal{V}$ *было вычислимой операцией, необходимо и достаточно, чтобы оно было операцией Колмогорова.*

6. Операции Поста. Обобщая и уточняя идеи Поста ([4,5]), естественно приходим к следующему определению операции Поста. Через $\mathfrak{S}_\text{А}[x_1, \ldots, x_n]$ обозначим минимальное множество: а) содержащее множество $\mathfrak{S}_\text{А}$ слов в алфавите А ([7]); б) содержащее «неизвестные» $x_1, \ldots, x_n$; в) вместе с каждыми своими элементами a и b содержащее элемент ab. Каждый элемент $g(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{S}_\text{А}[x_1, \ldots, x_n]$ при замене $x_1, \ldots, x_n$ элементами $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ из $\mathfrak{S}_\text{А}$ переходит в элемент $g(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ из $\mathfrak{S}_\text{А}$. Заменяя всюду в определении операции Колмогорова слова «правило Колмогорова» на «правило Поста», «операция Колмогорова» — на «операция Поста» и символ $\mathfrak{H}$ на символ $\mathfrak{S}_\text{А}$, получаем определение операции Поста в алфавите А. Операцию Поста в алфавите Б $\supseteq$ А назовем операцией Поста над алфавитом А.

(1—1)-соответствие между некоторым подмножеством $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{S}_\text{А}$ назовем (1—1)-нумерацией $\mathfrak{S}_\text{А}$; элемент $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$, соответствующий элементу $\mathfrak{f} \in \mathfrak{S}_\text{А}$, назовем номером $\mathfrak{f}$. Нумерацию назовем допустимой, коль скоро существует такая вычислимая функция $\gamma(x, y)$ (т. е. вычислимое частичное отображение $\mathfrak{H}^2$ в $\mathfrak{H}$), что если $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ суть номера $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, то $\gamma(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ есть номер $\mathfrak{ab}$ (в частности, допустимой является нумерация, рассмотренная в ([8])).

Теорема 6. *Выберем произвольную допустимую нумерацию и через* πM *обозначим совокупность номеров элементов множества* $M \subseteq \mathfrak{S}_\text{А}$ *в этой нумерации. Для того чтобы l-местная операция, ставящая в соответствие всяким множествам* $S_1, \ldots, S_l \subseteq \mathfrak{S}_\text{А}$

множество $\mathbf{P}(S_1, \ldots, S_l) \subseteq \mathfrak{S}_A$, *была операцией Поста над* A, *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая вычислимая операция* $\mathbf{U}$, *что* $\pi\mathbf{P}(S_1, \ldots, S_l) = \mathbf{U}(\pi S_1, \ldots, \pi S_l)$.

7. Сводимость. Назовем множество R сводящимся по перечислимости к множествам $S_1, \ldots, S_l$, если существует такая вычислимая операция $\mathbf{U}$, что $R = \mathbf{U}(S_1, \ldots, S_l)$. Если S_i и R суть подмножества натурального рода N, то, в силу теоремы 3, можно считать, что $\mathbf{U}$ есть отображение N^l в N.

Теорема 7. *Оператор* $\mathbf{F}$, *переводящий всякий набор арифметических функций* $\psi_1, \ldots, \psi_l$ *от* $m_1, \ldots, m_l$ *аргументов соответственно в n-местную функцию* $\varphi = \mathbf{F}(\psi_1, \ldots, \psi_l)$, *тогда и только тогда является частично-рекурсивным* ([2]), *когда существует такая вычислимая операция* $\mathbf{U}$, *что* $G_{\mathbf{F}(\psi_1, \ldots, \psi_l)} = \mathbf{U}(G_{\psi_1}, \ldots, G_{\psi_l})$.

(В силу теоремы 3 можно считать, что $\mathbf{U}$ есть отображение $N^{m_1+1} \times \ldots \times N^{m_l+1}$ в N^{n+1}.)

Следствие. *Функция* φ *тогда и только тогда сводится по вычислимости к функциям* $\psi_1, \ldots, \psi_l$, *когда ее график сводится по перечислимости к графикам* $\psi_1, \ldots, \psi_l$.

Теорема 8. *Множество* P *тогда и только тогда сводится по разрешимости к множеству* Q, *когда каждое из множеств* P *и* $\overline{P}$ *сводится по перечислимости к* Q *и* $\overline{Q}$ (здесь $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ суть дополнения к P и Q; ср. ([5])).

Следствие. *Если* P *и* Q *перечислимы, то сводимость по разрешимости* P *к* Q *равносильна сводимости по перечислимости* $\overline{P}$ *к* $\overline{Q}$.

А. Н. Колмогорову автор обязан значительным улучшением заметки.

Поступило
3 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Гильберт, Основания геометрии, 1948, добавление 7. [2] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, 1952. [3] S. C. Kleene, E. L. Post, Ann Math., 59, No. 3, 379 (1954). [4] E. L. Post, Am. J. Math., 65, 197 (1943). [5] E. L. Post, Bull. Am. Math. Soc., 54, No. 7, 641 (1948). [6] A. Mostowski, Fund. Math., 34, 81 (1947). [7] А. А. Марков, Тр. Матем. инст. им. Стеклова АН СССР, 42 (1954). [8] В. А. Успенский, ДАН, 91, 737 (1953).